



TITLE:

# A decision-theoretic approach with some loss functions to a hypothesis testing problem (Statistical Experiments and Clinical Trials)

AUTHOR(S):

舞原, 寛祐; 赤平, 昌文

---

CITATION:

舞原, 寛祐 ...[et al]. A decision-theoretic approach with some loss functions to a hypothesis testing problem (Statistical Experiments and Clinical Trials). 数理解析研究所講究録 2002, 1273: 178-196

ISSUE DATE:

2002-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/42240>

RIGHT:

# A decision-theoretic approach with some loss functions to a hypothesis testing problem

筑波大・数理物質科学 舞原 寛祐 (Hirosuke Maihara)  
筑波大・数学 赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

## 1. はじめに

古典的な統計的仮説検定問題を決定論的観点から考えると, Neyman-Pearson (N-P) の基本定理の設定においては, 第1種および第2種の過誤の確率を 0-1 損失関数によるリスクとして捉えることができる (Lehmann [Le86]). しかし, 最近, 応用分野において良く用いられている p 値のような概念を 0-1 損失によるリスクとして考えるには無理がある. そこで, 0-1 損失とは別の適当な損失関数, 特に 2 乗損失関数によるリスクを用いて, 仮説を母数の集合と見なした上で, その定義関数を推定する問題に置き換えて考える試みが行われ, 特に, 正規分布  $N(\theta, 1)$  における片側仮説検定問題において, p 値, N-P 検定, Bayes 決定関数のリスクの比較が行われている (たとえば, Hwang *et.al* [HCRWF92] 参照).

本論では, 2 乗損失によるリスクのミニマックス値を一樣に越えることができないリスクをもつ決定方式は存在しないことを示し, また, 指数分布, 両側指数分布の場合に p 値のリスクを求める. さらに, 荷重 2 乗損失関数を提案し, それによるリスクを, 正規分布の場合に, Bayes 決定方式, p 値, N-P 検定について求めて比較検討を行う. 特に, 正規分布の平均の片側検定問題において, ベイズ決定方式のリスクに関するミニマックス解を数値的に求める.

## 2. 設定

確率ベクトル  $\mathbf{X}$  が確率密度関数 (p.d.f.)  $f(\mathbf{x}, \theta)$  ( $\theta \in \Theta$ ) をもつ分布に従うとする. いま,  $\Theta_0, \Theta_1 \subset \mathbf{R}^1$ ,  $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$  として, 仮説  $H: \theta \in \Theta_0$ , 対立仮説  $K: \theta \in \Theta_1$  の検定問題において,  $\Theta_0$  の定義関数  $\chi_{\Theta_0}(\theta)$  の推定を行う. その際, 損失関数を

$$L_k(\theta, d) := |\chi_{\Theta_0}(\theta) - d|^k, \quad k = 1, 2 \quad (2.1)$$

とし,  $0 \leq \varphi(\mathbf{x}) \leq 1$  となる可測関数  $\varphi$  を決定方式といい,  $\varphi$  のリスクを

$$R_k(\theta, \varphi) := E_\theta[L_k(\theta, \varphi)] = \begin{cases} E_\theta[|1 - \varphi(\mathbf{X})|^k] & (\theta \in \Theta_0), \\ E_\theta[\{\varphi(\mathbf{X})\}^k] & (\theta \notin \Theta_0) \end{cases}$$

とする. Hwang *et.al* [HCRWF92] は, 正規分布の場合に, 平均の片側検定問題において,  $k = 2$  として Neyman-Pearson 検定, p 値, Bayes 方式等のリスクの数値計算を行い, そしてそれらを図示して比較した. 本論では, 母数  $\theta$  に関する片側検定問題において  $\varphi$  のリスクの最大値はリスクのミニマックス値より必ず大きくなることを示す. また, 指数分布, 両側指数分布の場合にリスクを求める.

次に, 仮説 H:  $\theta \leq \theta_0$ , 対立仮説 K:  $\theta > \theta_0$  の検定問題において, 損失関数

$$L^{(\gamma)}(\theta, d) := |\theta - \theta_0|^\gamma \{\chi_{\theta_0}(\theta) - d\}^2 \quad (\gamma > 0)$$

を考える. ただし,  $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0]$  である. これは, 損失関数 (2.1) と異なって, 仮説の境界  $\theta = \theta_0$  の近傍では損失が敏感に反応するようにしてある. このとき, 決定方式  $\varphi$  のリスクを

$$R^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_\theta [L^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = |\theta - \theta_0|^\gamma E_\theta [\{\chi_{\theta_0}(\theta) - \varphi(\mathbf{X})\}^2]$$

とし, 正規分布の平均の検定問題において,  $\gamma = 2$  として Bayes 方式, Neyman-Pearson 検定, p 値のリスクを求めて, 数値計算を行い, それらを図示して比較する. また, Bayes 方式のミニマックス性についても考える.

さらに,  $\theta (> 0)$  が尺度母数の場合に, 仮説 H:  $\theta \leq \theta_0$ , 対立仮説 K:  $\theta > \theta_0$  の検定問題において,  $\Theta_0 = (0, \theta_0]$  として損失関数

$$\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, d) := (\theta/\theta_0)^\gamma \{\chi_{\theta_0}(\theta) - d\}^2 \quad (\gamma \geq 0)$$

を考える. このとき, 決定方式  $\varphi$  のリスクを

$$\tilde{R}^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_\theta [\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = (\theta/\theta_0)^\gamma E_\theta [\{\chi_{\theta_0}(\theta) - \varphi(\mathbf{X})\}^2]$$

とし, 正規分布の標準偏差の検定問題において,  $\gamma = 0, 2$  として決定方式のリスクの比較および Bayes 方式のミニマックス性について考える.

### 3. 損失関数 $L_2$ によるリスク

まず, 損失関数  $L_2$  による決定方式  $\varphi$  のリスク  $R_2(\theta, \varphi)$  について, 一様にミニマックスの値以下となるリスクをもつ決定方式  $\varphi$  は存在しないことを示す. いま, 仮説 H:  $\theta \leq \theta_0$ , 対立仮説 K:  $\theta > \theta_0$  の検定問題において  $E_\theta(\varphi^2)$  が  $\theta$  の連続関数とする. このとき, 任意の決定方式  $\varphi$  について

$$\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi) \geq 1/4$$

であり,  $\varphi_0(\mathbf{x}) = 1/2$  a.e. となる  $\varphi_0$  はミニマックスになり, その値は

$$\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi_0) = 1/4 \tag{3.1}$$

である. また,  $\varphi(\mathbf{x}) \neq 1/2$  a.e. ならば

$$\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi) > 1/4$$

である. 実際に, まず,

$$\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi) \geq \max \{E_{\theta_0} [(1 - \varphi)^2], E_{\theta_0} (\varphi^2)\}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2} \{ E_{\theta_0} [(1 - \varphi)^2] + E_{\theta_0} (\varphi^2) \} \\
&= E_{\theta_0} \left[ \left( \varphi - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{4} \\
&\geq \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

になる. また,  $\varphi_0(\mathbf{x}) = 1/2$  a.e. とすれば

$$\inf_{\varphi} \sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi) = \sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi_0) = \frac{1}{4}$$

となるから,  $\varphi_0$  はミニマックスとなる. さらに, (3.2) より,  $\varphi(\mathbf{x}) \neq 1/2$  a.e. のときには

$$\sup_{\theta} R_2(\theta, \varphi) > 1/4$$

になる.

次に, 確率ベクトル  $\mathbf{X}$  に基づく統計量  $T(\mathbf{X})$  の仮説  $H: \theta \in \Theta_0$  の下での累積分布関数 (c.d.f.) を

$$F_{T(\mathbf{X})}^H(t) := P_H\{T(\mathbf{X}) \leq t\}, \quad t \in \mathbf{R}^1$$

とし,  $p$  値を

$$r(t) := P_H\{T(\mathbf{X}) > t\}, \quad t \in \mathbf{R}^1$$

とする. このとき, 仮説  $H$  の下で,  $U := F_{T(\mathbf{X})}^H(T)$  は一様分布  $U(0, 1)$  に従い,  $r(T) = 1 - U$  であるから,  $r$  の  $L_2$  によるリスクは,  $\theta \in \Theta_0$  のとき, すなわち仮説  $H$  の下で

$$R_2(\theta, r) = E_{\theta} [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - r(T)\}^2] = E_{\theta} [\{1 - r(T)\}^2] = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3} \tag{3.3}$$

となり,  $\theta \in \Theta_1$  のとき, すなわち対立仮説  $K$  の下で

$$R_2(\theta, r) = E_{\theta} [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - r(T)\}^2] = E_{\theta} [\{r(T)\}^2] \tag{3.4}$$

となる. いま,  $K$  の下で

$$G_K(a) := P_K\{r(T) \leq a\} = P_K\{1 - F_{T(\mathbf{X})}^H(T) \leq a\}, \quad a \in \mathbf{R}^1$$

とすれば, (3.4) は

$$R_2(\theta, r) = E_{\theta} [\{r(T)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 dG_K(a), \quad \theta \in \Theta_1$$

例 3.1 (指数分布). 確率変数  $T$  が p.d.f.

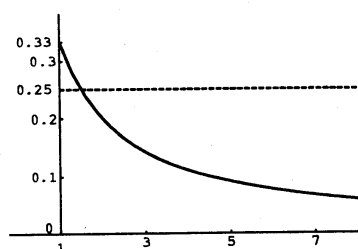
$$f_T(t; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} & (t > 0), \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

をもつ指数分布に従うとする. このとき, 仮説 H:  $\theta = 1$ , 対立仮説 K:  $\theta > 1$  の検定問題を考える. いま, p 値は  $r(t) = P_1\{T > t\} = e^{-t}$  ( $t > 0$ ) となり, (3.4) より,  $\theta > 1$  について

$$R_2(\theta, r) = E_\theta [\{r(T)\}^2] = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-(2+\frac{1}{\theta})t} dt = \frac{1}{2\theta + 1} \quad (3.5)$$

となる. よって, (3.3), (3.5) より, p 値のリスクは

$$R_2(\theta, r) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (\theta = 1), \\ \frac{1}{2\theta + 1} & (\theta > 1) \end{cases}$$



になる. なお, (3.1) よりミニマックス値は  $1/4$  である.

例 3.2 (両側指数分布). 確率変数  $T$  が p.d.f.

$$f_T(t; \theta) = \frac{1}{2} e^{-|t-\theta|} \quad (-\infty < t < \infty)$$

をもつ両側指数分布に従うとする. このとき, 仮説 H:  $\theta = 0$ , 対立仮説 K:  $\theta \neq 0$  の検定問題を考える. いま, p 値は

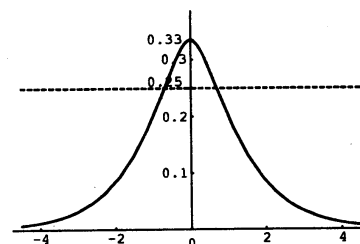
$$r(t) = P_0\{|T| > |t|\} = \int_{|t|}^\infty e^{-x} dx = e^{-|t|}$$

となり, (3.4) より,  $\theta \neq 0$  について

$$R_2(\theta, r) = E_\theta [\{r(T)\}^2] = E_\theta [e^{-2|T|}] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-2|t|} e^{-|t-\theta|} dt = \frac{1}{3} (2e^{-|\theta|} - e^{-2|\theta|}) \quad (3.6)$$

となる. よって, (3.3), (3.6) より, p 値のリスクは

$$R_2(\theta, r) = \begin{cases} \frac{1}{3} & (\theta = 0), \\ \frac{1}{3} (2e^{-|\theta|} - e^{-2|\theta|}) & (\theta \neq 0) \end{cases}$$



になる. なお, (3.1) よりミニマックス値は  $1/4$  である.

#### 4. 損失 $L^{(\gamma)}$ によるリスク

まず,  $\theta$  が位置母数の場合について考える. 確率変数  $X$  が (Lebesgue 測度に関する) p.d.f.  $f(x - \theta)$  をもつとし,  $\theta$  の (Lebesgue 測度に関する) 事前密度を  $\pi$  とする. いま, 仮説 H:  $\theta \leq \theta_0$ , 対立仮説 K:  $\theta > \theta_0$  の検定問題において,  $\Theta_0 = (-\infty, \theta_0]$  として, 決定方式  $\varphi$  の Bayes リスク, すなわち  $\varphi$  のリスク

$$R^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_{\theta} [L^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = |\theta - \theta_0|^{\gamma} E_{\theta} [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(X)\}^2]$$

の  $\pi$  による期待値

$$r_{\pi}(\varphi) := E_{\pi} [R^{(\gamma)}(\theta, \varphi)]$$

を考える. いま,  $\theta_0 = 0$  と仮定して一般性を失わない. このとき,  $\varphi$  の Bayes リスクは

$$\begin{aligned} r_{\pi}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\theta|^{\gamma} \pi(\theta) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(x)\}^2 f(x - \theta) dx \right\} d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \{1 - \varphi(x)\}^2 \int_{-\infty}^0 |\theta|^{\gamma} \pi(\theta) f(x - \theta) d\theta + \varphi^2(x) \int_0^{\infty} \theta^{\gamma} \pi(\theta) f(x - \theta) d\theta \right] dx \end{aligned} \quad (4.1)$$

となるから, Bayes 決定方式, すなわち  $r_{\pi}(\varphi)$  を最小にする  $\varphi$  を求めるためには, ほとんどすべての  $x$  について (4.1) の被積分関数  $[\dots]$  を最小にする  $\varphi$  を求めればよい. そこで,

$$A := \int_{-\infty}^0 |\theta|^{\gamma} \pi(\theta) f(x - \theta) d\theta, \quad B := \int_0^{\infty} \theta^{\gamma} \pi(\theta) f(x - \theta) d\theta$$

とにおいて

$$[\dots] = A(1 - \varphi)^2 + B\varphi^2 = (A + B)\varphi^2 - 2A\varphi + A$$

を最小にする  $\varphi$  は

$$\varphi_{\pi}^*(x) = \frac{A}{A + B} = \frac{\int_{-\infty}^0 |\theta|^{\gamma} f(x - \theta) \pi(\theta) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} |\theta|^{\gamma} f(x - \theta) \pi(\theta) d\theta}$$

となり, これが Bayes 決定方式になる. また,  $X = x$  を与えたときの  $\theta$  の事後密度は

$$p(\theta|x) = \frac{f(x - \theta) \pi(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \theta) \pi(\theta) d\theta}$$

になるから

$$\varphi_{\pi}^*(x) = \frac{\int_{-\infty}^0 |\theta|^{\gamma} p(\theta|x) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} |\theta|^{\gamma} p(\theta|x) d\theta} \quad (4.2)$$

**例 4.1** (正規分布の平均).  $X_1, \dots, X_n$  を正規分布  $N(\theta, 1)$  からの無作為標本とし,  $\theta$  の事前密度  $\pi_\sigma$  を  $N(0, \sigma^2)$  の p.d.f. とする. このとき,  $\bar{X} = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$  は  $N(\theta, 1/n)$  に従うから,  $\bar{X} = \bar{x}$  を与えたときの  $\theta$  の事後分布は正規分布

$$N\left(\frac{n\sigma^2\bar{x}}{n\sigma^2+1}, \frac{\sigma^2}{n\sigma^2+1}\right)$$

になる. ここで,  $\gamma = 2$  として, (4.2) から Bayes 決定方式は

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = \frac{\int_{-\infty}^0 \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta} = 1 - \frac{\int_0^{\infty} \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta}{\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta}$$

となる. また

$$\mu := \frac{n\sigma^2\bar{x}}{n\sigma^2+1}, \quad v^2 := \frac{\sigma^2}{n\sigma^2+1}$$

とおくと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta = v^2 + \mu^2, \quad (4.3)$$

$$\int_0^{\infty} \theta^2 p(\theta|\bar{x}) d\theta = (v^2 + \mu^2) \Phi\left(\frac{\mu}{v}\right) + \frac{\mu}{v} (2v^2 + \mu^2) \phi\left(\frac{\mu}{v}\right) \quad (4.4)$$

になる. ただし,  $\phi, \Phi$  は  $N(0, 1)$  のそれぞれ p.d.f., c.d.f. とする. よって, (4.2) ~ (4.4) から

$$\varphi_{\pi_\sigma}^*(\bar{x}) = 1 - \Phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right) - \frac{n\sigma\bar{x}\sqrt{n\sigma^2+1}}{n^2\sigma^2\bar{x}^2 + (n\sigma^2+1)} \phi\left(\frac{n\sigma\bar{x}}{\sqrt{n\sigma^2+1}}\right)$$

になる.

そこで, p 値, N-P 検定のリスクとともに, この Bayes 決定方式  $\varphi_{\pi_\sigma}^*$  のリスクの挙動を図示し, 比較してみる. まず, p 値, N-P 検定は, それぞれ

$$p(\bar{x}) = P_0\{\sqrt{n}\bar{X} \geq \sqrt{n}\bar{x}\} = \Phi(-\sqrt{n}\bar{x}),$$

$$\varphi_{\text{NP}}(\bar{x}) = \chi_{(-\infty, u_\alpha]}(\sqrt{n}\bar{x}) = \begin{cases} 1 & (\sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

により与えられる<sup>注1)</sup>. ただし,  $0 < \alpha < 1$  を N-P 検定の有意水準とし,  $u_\alpha$  を標準正規分布  $N(0, 1)$  の上側  $100\alpha\%$  点とする. この N-P 検定は一様最強力 (UMP) 検定になる. 次に,

<sup>注1)</sup> N-P 検定  $\varphi_{\text{NP}}$  は採択域  $\{x|\sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha\}$  の定義関数であって, 通常, 検定関数としてとる棄却域  $\{x|\sqrt{n}\bar{x} < u_\alpha\}^c = \{x|\sqrt{n}\bar{x} \geq u_\alpha\}$  の定義関数ではないことに注意. 検定論では, 仮説 H を棄却することを目的とし, 棄却域や棄却確率が着目される. 一方, 本論では, 仮説 H に対応した集合  $\Theta_0$  の定義関数  $\chi_{\Theta_0}(\theta)$  の推定について考えていて, 推定量の期待値が仮説 H の下で  $1 (= \chi_{\Theta_0}(\theta))$  に近く, 仮説 K の下で  $0 (= \chi_{\Theta_0}(\theta))$  に近いことが望ましい. そこで, 通常の場合とは  $0, 1$  を逆にすることで, 仮説 H の下で, すなわち任意の  $\theta \leq 0$  について  $E_\theta[\varphi_{\text{NP}}(\bar{x})] = P_\theta\{\sqrt{n}\bar{x} \leq u_\alpha\} = P_\theta\{\sqrt{n}(\bar{x} - \theta) \leq u_\alpha - \sqrt{n}\theta\} = \Phi[u_\alpha - \sqrt{n}\theta] \geq \Phi[u_\alpha] = 1 - \alpha$  となり, 水準  $\alpha$  は  $0.1$  や  $0.05$  など小さい値をとるので, この期待値は  $1$  に近くなる. 一方, 対立仮説 K の下で, すなわち任意の  $\theta > 0$  についても同様に  $E_\theta[\varphi_{\text{NP}}(\bar{x})] = \Phi[u_\alpha - \sqrt{n}\theta]$  となり, 大きい値の  $\theta$  に対してこの期待値は  $0$  に近くなる.

Bayes 決定方式, p 値, N-P 検定それぞれのリスクを求めよう. まず, Bayes 決定方式のリスクは任意の  $\theta \leq 0$  について

$$\begin{aligned}
 R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) &= \theta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \Phi \left( \frac{n\sigma x}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) + \frac{n\sigma x \sqrt{n\sigma^2 + 1}}{n^2 \sigma^2 x + (n\sigma^2 + 1)} \phi \left( \frac{n\sigma x}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right\}^2 \sqrt{n} \phi(\sqrt{n}(x - \theta)) dx \\
 &= \theta^2 E_Z \left[ \left\{ \Phi \left( \frac{\sqrt{n}\sigma(Z + \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) + \frac{\sqrt{n}\sigma(Z + \sqrt{n}\theta)\sqrt{n\sigma^2 + 1}}{\{\sqrt{n}\sigma(Z + \sqrt{n}\theta)\}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \phi \left( \frac{\sqrt{n}\sigma(Z + \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right\}^2 \right] \quad (4.5)
 \end{aligned}$$

になる. ただし,  $Z$  は  $N(0, 1)$  に従う確率変数とする. また, 任意の  $\theta > 0$  についても同様にして

$$\begin{aligned}
 R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) &= \theta^2 E_Z \left[ \left\{ \Phi \left( \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) + \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\sqrt{n\sigma^2 + 1}}{\{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)\}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \phi \left( \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}\theta)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right\}^2 \right] \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

となる. よって, (4.5), (4.6) より, 任意の  $\theta \in \mathbf{R}^1$  について

$$\begin{aligned}
 R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) &= \theta^2 E_Z \left[ \left\{ \Phi \left( \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) + \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)\sqrt{n\sigma^2 + 1}}{\{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)\}^2 + (n\sigma^2 + 1)} \phi \left( \frac{\sqrt{n}\sigma(Z - \sqrt{n}|\theta|)}{\sqrt{n\sigma^2 + 1}} \right) \right\}^2 \right] \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

となる. (4.7) より, この Bayes 決定方式のリスクは原点  $\theta = 0$  に関して対称であることに注意.

次に, N-P 検定のリスクは, 任意の  $\theta \leq 0$  について

$$\begin{aligned}
 R^{(2)}(\theta, \varphi_{NP}) &= \theta^2 E_{\bar{X}} \left[ \left\{ 1 - \chi_{(-\infty, u_\alpha]}(\sqrt{n}\bar{X}) \right\}^2 \right] = \theta^2 E_{\bar{X}} \left[ \left\{ \chi_{(u_\alpha, \infty)}(\sqrt{n}\bar{X}) \right\}^2 \right] \\
 &= \theta^2 E_{\bar{X}} \left[ \chi_{(u_\alpha, \infty)}(\sqrt{n}\bar{X}) \right] = \theta^2 P_{\bar{X}} \{ \sqrt{n}\bar{X} > u_\alpha \} \\
 &= \theta^2 P_{\bar{X}} \{ \sqrt{n}(\bar{X} - \theta) > u_\alpha - \sqrt{n}\theta \} = \theta^2 \Phi(-u_\alpha - \sqrt{n}\theta)
 \end{aligned}$$

になる. 一方, 任意の  $\theta > 0$  について

$$R^{(2)}(\theta, \varphi_{NP}) = \theta^2 E_{\bar{X}} \left[ \left\{ \chi_{(-\infty, u_\alpha]}(\sqrt{n}\bar{X}) \right\}^2 \right] = \theta^2 \Phi(u_\alpha - \sqrt{n}\theta)$$

となる. よって, 任意の  $\theta \in \mathbf{R}^1$  について

$$R^{(2)}(\theta, \varphi_{NP}) = \theta^2 \Phi(\operatorname{sgn}(\theta)(u_\alpha - \sqrt{n}\theta)) \quad (4.8)$$

となる. ただし,  $\operatorname{sgn}(\theta)$  は  $\theta$  の符号とする.

最後に, p 値のリスクは, 任意の  $\theta \leq 0$  について

$$\begin{aligned}
 R^{(2)}(\theta, p) &= \theta^2 E_{\bar{X}} \left[ \left\{ 1 - \Phi(-\sqrt{n}\bar{X}) \right\}^2 \right] = \theta^2 E_{\bar{X}} \left[ \Phi(\sqrt{n}\bar{X})^2 \right] \\
 &= \theta^2 E_Z \left[ \Phi(Z + \sqrt{n}\theta)^2 \right] = \theta^2 E_Z \left[ \Phi(Z - \sqrt{n}|\theta|)^2 \right]
 \end{aligned}$$



になる. また, 任意の  $\theta > 0$  について

$$R^{(2)}(\theta, p) = \theta^2 E_{\bar{X}} \left[ \Phi(-\sqrt{n}\bar{X})^2 \right] = \theta^2 E_Z \left[ \Phi(Z + \sqrt{n}\theta)^2 \right] = \theta^2 E_Z \left[ \Phi(Z - \sqrt{n}|\theta|)^2 \right]$$

となる. よって, 任意の  $\theta \in \mathbf{R}^1$  について

$$R^{(2)}(\theta, \varphi_{NP}) = \theta^2 E_Z \left[ \Phi(Z - \sqrt{n}|\theta|)^2 \right] \quad (4.9)$$

となる. ここで, (4.9) より, Bayes 決定方式のリスクと同様に,  $p$  値のリスクも原点  $\theta = 0$  に関して対称であることに注意.

そこで, 求めた (4.7), (4.8), (4.9) をもとに, Bayes 決定方式,  $p$  値, N-P 検定のリスクのグラフを描く (図 1, 2).

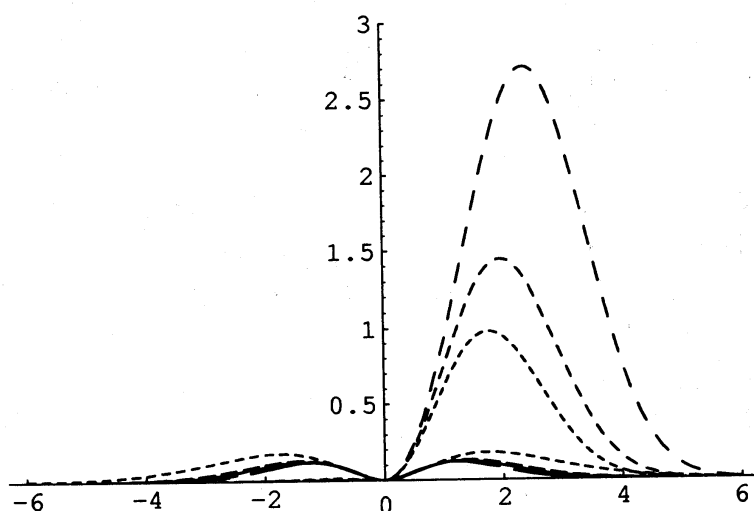


図 1 Bayes 決定方式,  $p$  値, N-P 検定のリスク ( $n = 1$ )

図 1 において, 仮説  $H$  に対応する領域  $\Theta_0 = \{\theta | \theta \leq 0\}$  で極端に小さく, 対立仮説  $K$  に対応する領域  $\Theta_1 = \{\theta | \theta > 0\}$  で極端に大きいグラフが N-P 検定のリスクであり, 有意水準  $\alpha$  が大きくなるにつれて ( $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$ ), 最大リスクが小さくなる. 左右対称で全体にわたって低いグラフが Bayes 決定方式と  $p$  値のリスクである. N-P 検定のリスクは  $\Theta_0$  においては大変小さく好ましいのだが, 逆に  $\Theta_1$  においてはそのリスクは大変大きくなってしまふ. これは, N-P 検定が 0 か 1 しか取らず, 滑らかでないことと, 仮説  $H$  を支持することに重点を置いている決定方式であることに起因していると思われる (注 1) 参照). 検定論の立場から見れば, Neyman-Pearson の基本定理より導かれる検定は, UMP 検定, もしくは UMPU (一様最強力不偏) 検定を与える好ましい決定方式なのだが, いま, 考えている  $\chi_{\Theta_0}(\theta)$  の推定問題においては, 通常の N-P 検定における仮説  $H$  に固執する影響が出てしまふ. 一方,  $p$  値や Bayes 決定方式のリスクは全体的にリスクが低く,  $\Theta_1$  で極端にリスクが大きくなる N-P 検定よりも好ましいといえる.

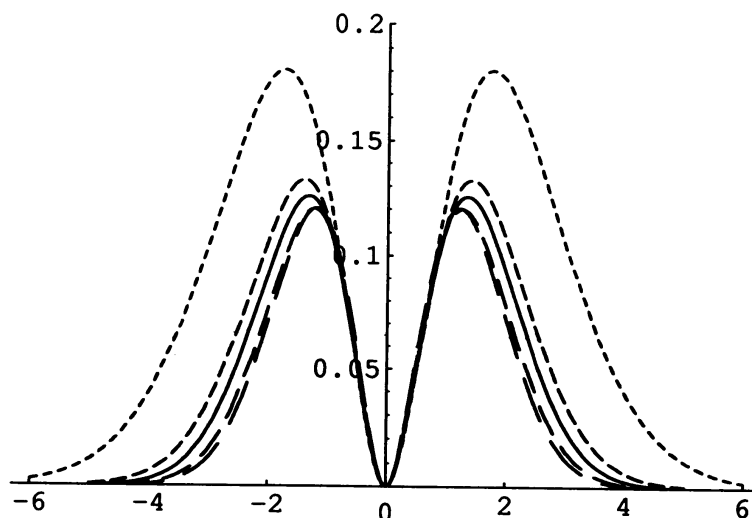


図2 Bayes 決定方式,  $p$  値のリスク ( $n=1$ ). 実線が  $p$  値のリスク  $R^{(2)}(\theta, p)$  であり, 破線が Bayes 決定方式のリスク  $R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$  である. 破線幅の小さい方から順に, 事前 (分布の) 分散  $\sigma^2 = 0.3^2, 0.5^2, 1^2, 2^2$  とする.

また, 図2のように, 事前分散  $\sigma^2$  の値によっては, 図2の場合には  $\sigma^2 = 0.3^2, 0.5^2$  のときに, Bayes 決定方式の最大リスク  $\sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$  は  $p$  値の最大リスク  $\sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, p)$  を下回るので, Bayes 決定方式がこの3つの決定方式の中では好ましいといえる. これは, リスク  $R(\theta, \varphi)$  を積分し, リスクを平均した Bayes リスク  $r_{\pi}(\varphi)$  から Bayes 決定方式が導きだされるために, Bayes 決定方式のリスクが全体的に低くなるということであろう. そこで, 決定方式を Bayes 決定方式  $\varphi_{\pi_\sigma}^*$  に限って, その中で, リスクのミニマックス方式, すなわち

$$\inf_{\sigma} \sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*) = \sup_{\theta} R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$$

となる事前分散  $\sigma_0^2$ , すなわちミニマックス解による方式を求めよう. ここで, Bayes 決定方式のリスク  $R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$  が原点  $\theta = 0$  に関して対称であることから, 上の式での  $\sup$  は  $\theta \geq 0$  について考えればよい. しかし, Bayes 決定方式のリスクの式 (4.7) を見てもわかるように, このようなミニマックス解  $\sigma_0$  を解析的に求めることは難しいので数値的に考察する. 図2からわかるように,  $\sigma$  を小さくするに従って Bayes 決定方式の最大リスクが単調に下がっていくというわけでもない. これは, 事前分散  $\sigma^2$  の値を小さくして, 極端に言えば,  $\sigma^2 \rightarrow 0$  として,  $\theta$  を中心  $\theta = 0$  の周りに集中させたいのだが, ある程度以上  $\sigma^2$  の値を小さくすると, 中心  $\theta = 0$  の近傍の外で逆にリスクが上がってしまう. ある程度  $\sigma^2$  の値の大きさを保っておいて, その事前分布の設定に遊びを持たせておいた方がよいのである.  $\sigma_0$  を数値的に考察する手法としては,  $\sigma$  の値をいくつかとってグラフを図示し, 最大リスクをとる点を結んで曲線を書いたときにその曲線の極小値点となる  $\sigma$  の値を見つけて, 次に, 先ほどよりも細かい間隔でその  $\sigma$  の値の前後の値をとって, 同じことを繰り返して, 小数点第4位で四捨五入して  $\sigma$  の値を求めた.

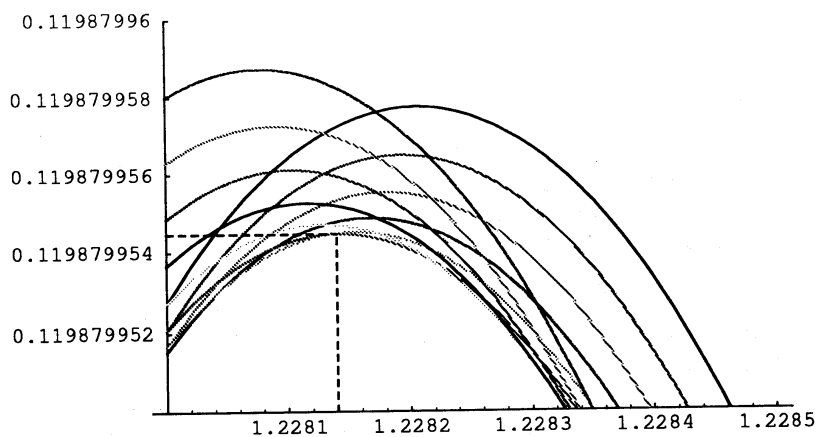


図 3 Bayes 決定方式のリスク  $R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$  およびミニマックス解  $\sigma_0 \equiv 1.186$   
 $(n = 1, \sigma = 1.1850 (0.0002) 1.1870)$ .

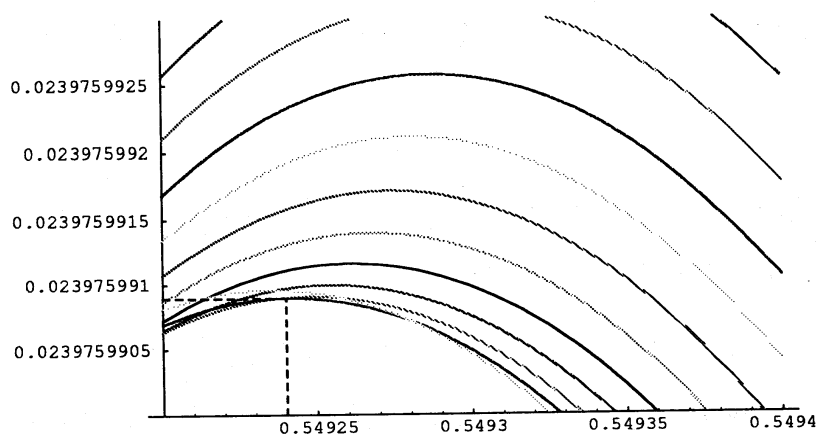


図 4 Bayes 決定方式のリスク  $R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$  およびミニマックス解  $\sigma_0 \equiv 0.530$   
 $(n = 5, \sigma = 0.5295 (0.0001) 0.5305)$ .

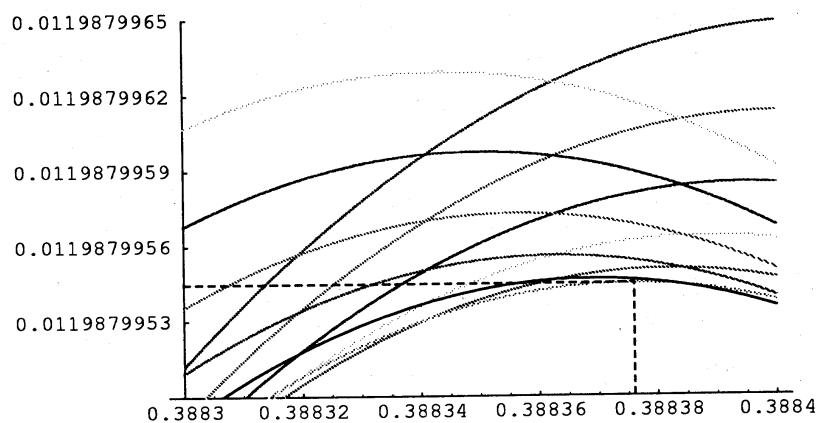


図 5 Bayes 決定方式のリスク  $R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$  およびミニマックス解  $\sigma_0 \equiv 0.375$   
 $(n = 10, \sigma = 0.3745 (0.0001) 0.3755)$ .

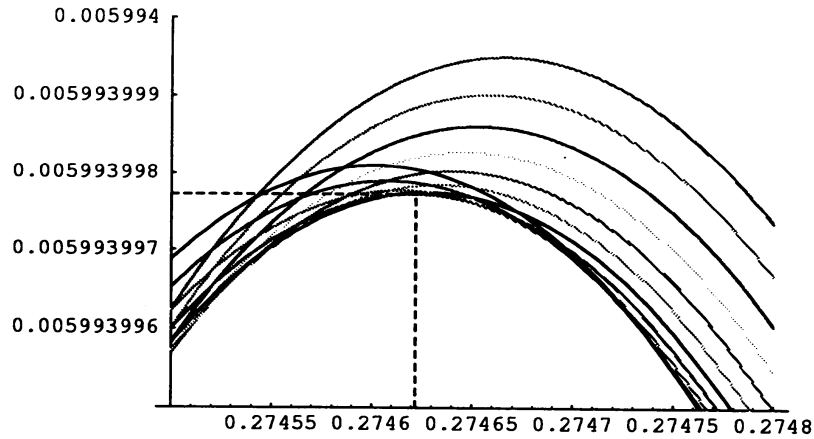


図 6 Bayes 決定方式のリスク  $R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_\sigma}^*)$  およびミニマックス解  $\sigma_0 \doteq 0.265$   
 $(n = 20, \sigma = 0.2645 (0.0001) 0.2655)$ .

グラフを見て判断するしかないが、標本数  $n = 1, 5, 10, 20$  のときのミニマックスリスク解  $\sigma_0$  とその  $\sigma_0$  に対する Bayes 決定方式  $\varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*$  がとる最大リスク  $\sup_\theta R^{(2)}(\theta, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*)$  はそれぞれ

$$n = 1 \text{ のとき, } \sigma_0 \doteq 1.186, R(1.228, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.11988,$$

$$n = 5 \text{ のとき, } \sigma_0 \doteq 0.530, R(0.549, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.02398,$$

$$n = 10 \text{ のとき, } \sigma_0 \doteq 0.357, R(0.388, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.01199,$$

$$n = 20 \text{ のとき, } \sigma_0 \doteq 0.265, R(0.275, \varphi_{\pi_{\sigma_0}}^*) \doteq 0.00599$$

となる。このことから、当然ではあるが、標本数  $n$  を大きくすれば、事前分布の分散  $\sigma^2$  を小さくしてよいと言える。

次に、 $\theta$  が尺度母数の場合について考える。確率変数  $X$  が (Lebesgue 測度に関する) p.d.f.  $(1/\theta)f(x/\theta) (\theta > 0)$  をもつとし、 $\theta$  の (Lebesgue 測度に関する) 事前密度を  $\pi$  とする。いま、仮説 H:  $\theta \leq \theta_0$ , 対立仮説 K:  $\theta > \theta_0$  の検定問題において、 $\Theta_0 = (0, \theta_0]$  として、損失関数

$$\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, d) := \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^\gamma \{\chi_{\Theta_0}(\theta) - d\}^2 \quad (\gamma > 0)$$

を考える。これは、位置母数の場合と同様に、仮説の境界  $\theta = \theta_0$  の近傍では損失が敏感に反応するようにしてある。特に、 $\gamma = 0$  とすれば、この損失関数は通常の 2 乗損失になる。一般に、決定方式  $\varphi$  のリスクは

$$\tilde{R}^{(\gamma)}(\theta, \varphi) := E_\theta [\tilde{L}^{(\gamma)}(\theta, \varphi)] = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^\gamma E_\theta [\{\chi_{\Theta_0}(\theta) - \varphi(X)\}^2]$$

となる. いま,  $\theta_0 = 1$  と仮定して一般性を失わない. このとき, Bayes 決定方式は, 位置母数の場合と同様にして

$$\varphi_{\pi}^*(x) = \frac{\int_0^1 \theta^{\gamma} \frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}\right) \pi(\theta) d\theta}{\int_1^{\infty} \theta^{\gamma} \frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}\right) \pi(\theta) d\theta}$$

となる. また,  $X = x$  を与えたときの  $\theta$  の事後密度は

$$p(\theta|x) = \frac{\frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}\right) \pi(\theta)}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\theta} f\left(\frac{x}{\theta}\right) \pi(\theta) d\theta}$$

になるから

$$\varphi_{\pi}^*(x) = \frac{\int_0^1 \theta^{\gamma} p(\theta|x) d\theta}{\int_0^{\infty} \theta^{\gamma} p(\theta|x) d\theta} \quad (4.10)$$

と表わせる.

**例 4.2** (正規分布の標準偏差).  $X_1, \dots, X_n$  を正規分布  $N(0, \sigma^2)$  からの無作為標本とし,  $\tau := 1/(2\sigma^2)$  の事前密度  $\pi_a$  を共役分布であるガンマ分布  $G(a, b)$  ( $a > 1, b = 2a - 2$ ) の p.d.f. とする<sup>注2)</sup>, すなわち,  $\pi_a(\tau) = b^a \tau^{a-1} e^{-b\tau} / \Gamma(a)$  とする. 変換  $\tau = 1/(2\sigma^2)$  のヤコビアンは  $|d\tau/d\sigma| = 1/\sigma^3$  になるから,  $\sigma$  の事前密度は

$$\pi_a(\sigma) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{a-1} e^{-\frac{b}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma^3} = \frac{b^a}{2^{a-1}\Gamma(a)} \sigma^{-2a-1} e^{-\frac{b}{2\sigma^2}} \propto \sigma^{-2a-1} e^{-\frac{b}{2\sigma^2}}$$

になる. このとき,  $Y := \sum_{i=1}^n X_i^2$  とおくと,  $Y/\sigma^2$  は自由度  $n$  のカイ 2 乗分布  $\chi_n^2$  に従い,  $Y$  の分布の p.d.f. は

$$\begin{aligned} f_Y(y; \sigma) &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \left(\frac{y}{\sigma^2}\right)^{(n/2)-1} e^{-(y/\sigma^2)/2} \frac{1}{\sigma^2} \\ &= \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)\sigma^n} y^{(n/2)-1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \propto \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \quad (y > 0) \end{aligned}$$

になるから,  $Y = y$  を与えたときの  $\sigma$  の事後密度は

$$p(\sigma|y) = \frac{f_Y(y; \sigma) \pi_a(\sigma)}{\int_0^{\infty} f_Y(y; \sigma) \pi_a(\sigma) d\sigma} = \frac{\frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \sigma^{-2a-1} e^{-\frac{b}{2\sigma^2}}}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma^n} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} \sigma^{-2a-1} e^{-\frac{b}{2\sigma^2}} d\sigma} = \frac{\sigma^{-(n+2a+1)} e^{-\frac{b+y}{2\sigma^2}}}{\int_0^{\infty} \sigma^{-(n+2a+1)} e^{-\frac{b+y}{2\sigma^2}} d\sigma}$$

<sup>注2)</sup> ガンマ分布の 2 つのパラメータを変化させて Bayes 決定方式のリスクを考えるのは煩雑になるので,  $\sigma^2 = 1$  に対応する  $\tau = 1/(2 \cdot 1) = 1/2$  を最頻値にするために, 2 つのパラメータにこのような関係を持たせた. 実際, ガンマ分布  $G(a, b)$  ( $a, b > 0$ ) の p.d.f.  $f(x|a, b)$  を微分すると,

$$\frac{df(x|a, b)}{dx} = -\frac{b^a}{\Gamma(a)} \{bx - (a-1)\} x^{a-2} e^{-bx}$$

となり,  $a > 1$  かつ  $b = 2(a-1)$  ならば,  $x = 1/2$  が最頻値になる.

になる. ここで,  $t = (b + y)/\sigma^2$  という変数変換を用いれば, (4.10) から Bayes 決定方式は

$$\begin{aligned}\varphi_{\pi_a}^*(y) &= \frac{\int_0^1 \sigma^\gamma p(\sigma|y) d\sigma}{\int_0^\infty \sigma^\gamma p(\sigma|y) d\sigma} = 1 - \frac{\int_1^\infty \sigma^\gamma p(\sigma|y) d\sigma}{\int_0^\infty \sigma^\gamma p(\sigma|y) d\sigma} = 1 - \frac{\int_1^\infty \sigma^{-(n+2a-\alpha+1)} e^{-\frac{b+y}{2\sigma^2}} d\sigma}{\int_0^\infty \sigma^{-(n+2a-\alpha+1)} e^{-\frac{b+y}{2\sigma^2}} d\sigma} \\ &= 1 - \frac{\int_0^{b+y} t^{(n+2a-\alpha)/2-1} e^{-t/2} dt}{\int_0^\infty t^{(n+2a-\alpha)/2-1} e^{-t/2} dt} = 1 - F(b+y; (n+2a-\alpha)/2, 1/2) \\ &= Q(b+y; (n+2a-\alpha)/2, 1/2)\end{aligned}\quad (4.11)$$

となる. ただし,  $F(\cdot; (n+2a-\alpha)/2, 1/2)$ ,  $Q(\cdot; (n+2a-\alpha)/2, 1/2)$  はそれぞれガンマ分布  $G((n+2a-\alpha)/2, 1/2)$  の累積分布関数 (c.d.f.), 上側確率とする. 特に,  $n+2a-\alpha$  が自然数となるように  $a, \alpha$  の値をとれば,  $G((n+2a-\alpha)/2, 1/2)$  は自由度  $n+2a-\alpha$  のカイ 2 乗分布  $\chi_{n+2a-\alpha}^2$  に等しいから, (4.11) は

$$\varphi_{\pi_a}^*(y) = 1 - F_{n+2a-\alpha}(b+y) = Q_{n+2a-\alpha}(b+y) \quad (4.12)$$

と書き直される. ただし,  $F_{n+2a-\alpha}$ ,  $Q_{n+2a-\alpha}$  はそれぞれ  $\chi_{n+2a-\alpha}^2$  分布の c.d.f., 上側確率とする.

そこで, 仮説 H:  $\sigma \leq \sigma_0$ , K:  $\sigma > \sigma_0$  の検定問題において,  $\gamma = 0$ , すなわち通常の 2 乗損失  $\tilde{L}^{(0)}$  を損失関数に用いたときに p 値, N-P 検定のリスクとともに, この Bayes 決定方式  $\varphi_{\pi_a}^*$  のリスクの挙動を図示し, 比較してみる. p 値, N-P 検定は, それぞれ

$$\begin{aligned}p(y) &= P_1\{Y \geq y\} = P_1\{Y/1^2 \geq y/1^2\} = 1 - F_n(y) = Q_n(y), \\ \varphi_{NP}(y) &= \chi_{(-\infty, \chi_{n,\alpha}^2]}(y) = \begin{cases} 1 & (y \leq \chi_{n,\alpha}^2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}\end{aligned}$$

により与えられる. ただし,  $F_n$ ,  $Q_n$  はそれぞれ  $\chi_n^2$  分布の c.d.f., 上側確率とし,  $0 < \alpha < 1$  を N-P 検定の一様最強力 (UMP) 検定の有意水準とし,  $\chi_{n,\alpha}^2$  を  $\chi_n^2$  分布の上側 100 $\alpha$ % 点とする. 次に, Bayes 決定方式, p 値, N-P 検定それぞれのリスクを求めよう. まず, Bayes 決定方式  $\varphi_{\pi_a}^*$  のリスクは任意の  $\sigma \leq 1$  について

$$\tilde{R}^{(0)}(\sigma, \varphi_{\pi_a}^*) = E_{Z_n} \left[ \left\{ F(b + \sigma^2 Z_n; (n+2a)/2, 1/2) \right\}^2 \right] \quad (4.13)$$

になる. ただし,  $Z_n$  は  $\chi_n^2$  分布に従う確率変数とする. また, 任意の  $\sigma > 1$  についても同様にして

$$\tilde{R}^{(0)}(\sigma, \varphi_{\pi_a}^*) = E_{Z_n} \left[ \left\{ Q(b + \sigma^2 Z_n; (n+2a)/2, 1/2) \right\}^2 \right] \quad (4.14)$$

となる.

次に, N-P 検定のリスクは, 任意の  $\sigma \leq 1$  について

$$\tilde{R}^{(0)}(\sigma, \varphi_{NP}) = E_\sigma \left[ \left\{ 1 - \chi_{(0, \chi_{n,\alpha}^2]}(Y) \right\}^2 \right] = E_\sigma \left[ \left\{ \chi_{(\chi_{n,\alpha}^2, \infty)}(Y) \right\}^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= E_{\sigma} \left[ \chi_{(\chi_{n,\alpha}^2, \infty)}(Y) \right] = P_{\sigma} \{Y > \chi_{n,\alpha}^2\} \\
&= P_{\sigma} \{Y/\sigma^2 > \chi_{n,\alpha}^2/\sigma^2\} = Q_n(\chi_{n,\alpha}^2/\sigma^2)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

になる. 一方, 任意の  $\sigma > 1$  について

$$\tilde{R}^{(0)}(\sigma, \varphi_{NP}) = E_{\sigma} \left[ \left\{ \chi_{(0, \chi_{n,\alpha}^2]}(Y) \right\}^2 \right] = F_n(\chi_{n,\alpha}^2/\sigma^2) \tag{4.16}$$

となる.

最後に, p 値のリスクは任意の  $\sigma \leq 1$  について

$$\tilde{R}^{(0)}(\sigma, p) = E_{Z_n} \left[ \left\{ F_n(\sigma^2 Z_n) \right\}^2 \right] \tag{4.17}$$

になる. ただし,  $Z_n$  は  $\chi_n^2$  分布に従う確率変数とする. また, 任意の  $\sigma > 1$  についても同様にして

$$\tilde{R}^{(0)}(\sigma, p) = E_{Z_n} \left[ \left\{ Q_n(\sigma^2 Z_n) \right\}^2 \right] \tag{4.18}$$

となる.

そこで, 求めた (4.13)~(4.18) をもとに, Bayes 決定方式, p 値, N-P 検定のリスクのグラフを以下に図示する. まず, N-P 検定と p 値のリスクを比較してみると次のようになる.

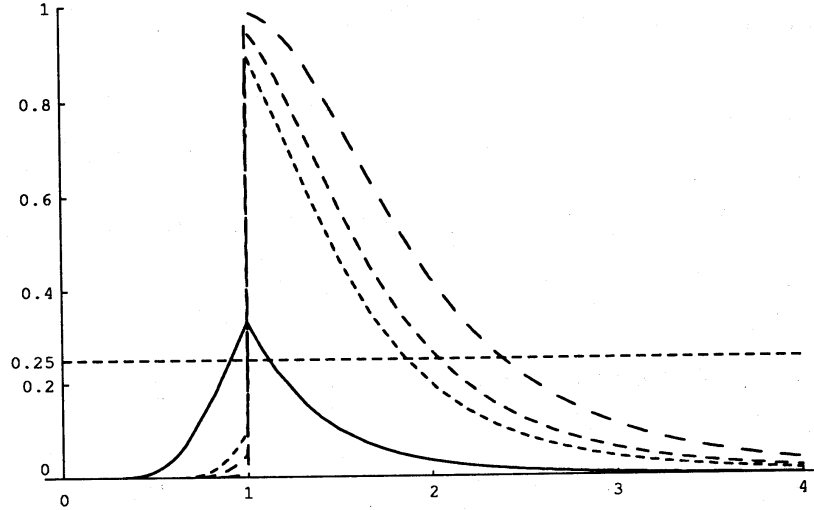


図8 p 値, N-P 検定のリスク ( $n=5$ ). 実線が p 値のリスク  $\tilde{R}^{(0)}(\sigma, p)$  で, 破線が N-P 検定のリスク  $\tilde{R}^{(0)}(\sigma, \varphi_{NP})$  であり, 破線の幅が狭くなる順に有意水準  $\alpha$  を  $\alpha = 0.01, 0.05, 0.1$  としている (図 10, 12, 14 も同様).

図8のように, 正規分布の平均の場合と同様に, やはり, N-P 検定は仮説 H に対応する領域  $\Theta_0 = \{\sigma | 0 < \sigma \leq 1\}$  で極端に小さく, 対立仮説 K に対応する領域  $\Theta_1 = \{\sigma | \sigma > 1\}$  で極端に大きくなってしまふ. なお, リスクが 0.25 のところに直線を引いているが, これは, 損失関数として 2 乗損失を用いた場合に存在するミニマックス決定方式  $\varphi_0 (= 1/2 \text{ a.e.})$  の定数リスク 0.25 である. 次に, Bayes 決定方式, p 値比較してみると次のようになる.

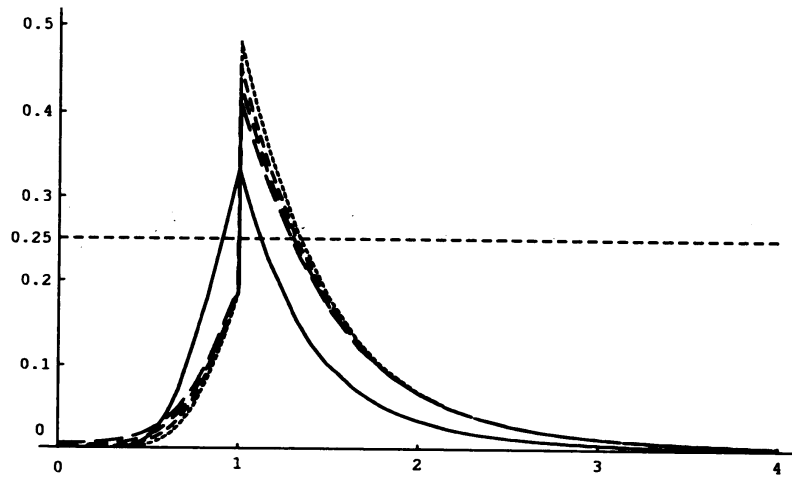


図9 Bayes 決定方式, p 値のリスク ( $n = 5$ ). 実線が p 値のリスク  $\tilde{R}^{(0)}(\sigma, p)$  で, 破線が N-P 検定のリスク  $\tilde{R}^{(0)}(\sigma, \varphi_{NP})$  であり, 破線の幅が広がる順に  $a$  の値を  $a = 2, 3, 4, 5$  としている (図 11, 13, 15 も同様).

やはり, 正規分布の場合と同様に Bayes 決定方式のリスクは p 値のリスクに近く, 全体にわたって安定している.

さらに,  $\gamma = 2$  とした荷重 2 乗損失  $\tilde{L}^{(2)}$  を損失関数として用いたときの決定方式のリスクを考える. N-P 検定と p 値のリスクは, 通常の 2 乗損失  $\tilde{L}^{(0)}$  を用いた場合のそれぞれのリスク (4.15)~ (4.18) に単に  $\sigma^2$  を乗じたものになる. Bayes 決定方式は,  $\gamma = 2$  のとき, (4.11) より

$$\varphi_{\pi_a}^*(y) = 1 - F(b + y; (n + 2a - 2)/2, 1/2) = Q(b + y; (n + 2a - 2)/2, 1/2) \quad (4.19)$$

となる. よって, そのリスクは, (4.13), (4.14) と同様にして, 任意の  $\sigma \leq 1$  について

$$\tilde{R}^{(2)}(\sigma, \varphi_{\pi_a}^*) = \sigma^2 E_{Z_n} \left[ \left\{ F(b + \sigma^2 Z_n; (n + 2a - 2)/2, 1/2) \right\}^2 \right] \quad (4.20)$$

になる. ただし,  $Z_n$  は  $\chi_n^2$  分布に従う確率変数とする. また, 任意の  $\sigma > 1$  についても同様にして

$$\tilde{R}^{(2)}(\sigma, \varphi_{\pi_a}^*) = \sigma^2 E_{Z_n} \left[ \left\{ Q(b + \sigma^2 Z_n; (n + 2a - 2)/2, 1/2) \right\}^2 \right] \quad (4.21)$$

となる. このとき, Bayes 決定方式, p 値, N-P 検定のリスクのグラフを描く (図 10~15). まず, N-P 検定と p 値のリスクを比較してみると次のようになる.



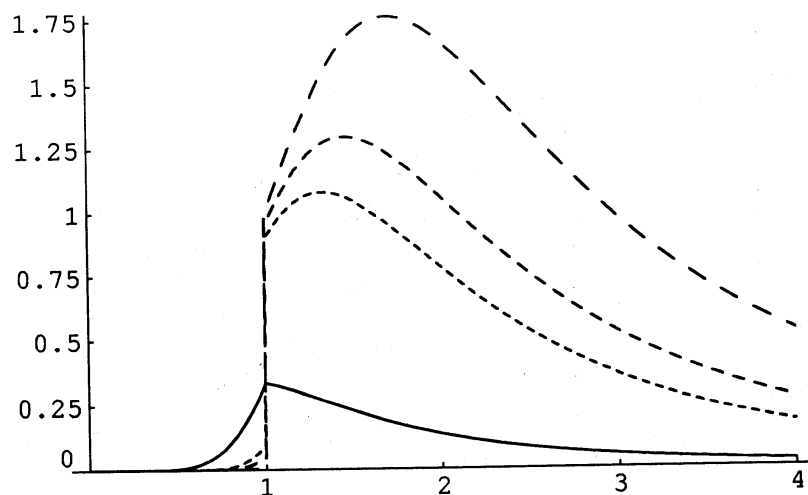


図 10 p 値, N-P 検定のリスク ( $n = 5$ )

図10のように, 正規分布の平均の推定の場合と同様に, やはり, N-P 検定は仮説 H に対応する領域  $\Theta_0 = \{\sigma | 0 < \sigma \leq 1\}$  で極端に小さく, 対立仮説 K に対応する領域  $\Theta_1 = \{\sigma | \sigma > 1\}$  で極端に大きくなってしまふ. 次に, Bayes 決定方式, p 値比較してみると次のようになる.

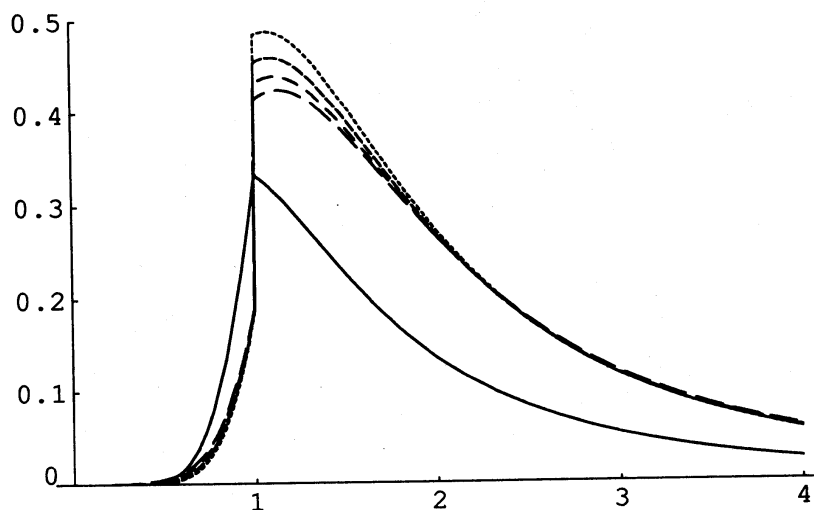


図 11 Bayes 決定方式, p 値のリスク ( $n = 5$ )

標本数  $n$  を変えて同様にリスクを比較してみる.

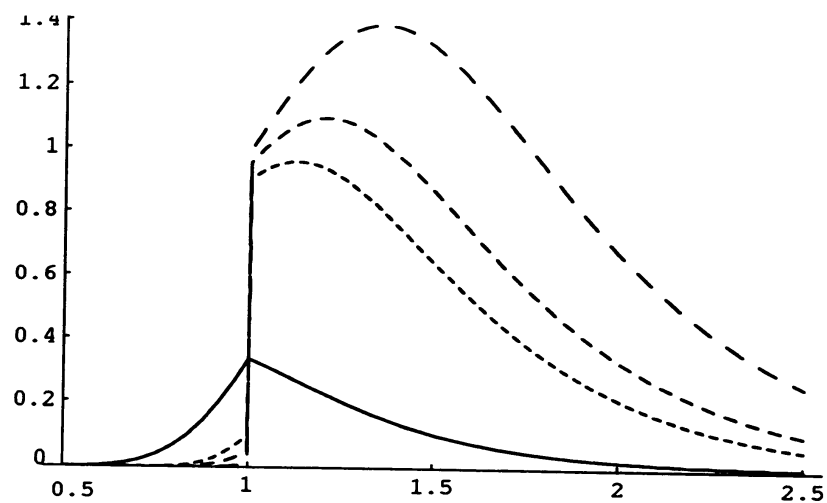


図 12 p 値, N-P 検定のリスク ( $n = 10$ )

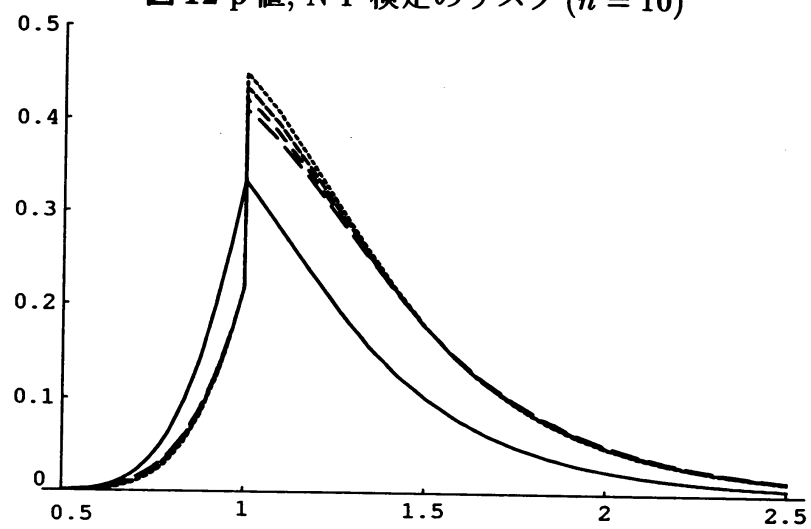


図 13 Bayes 決定方式, p 値のリスク ( $n = 10$ )

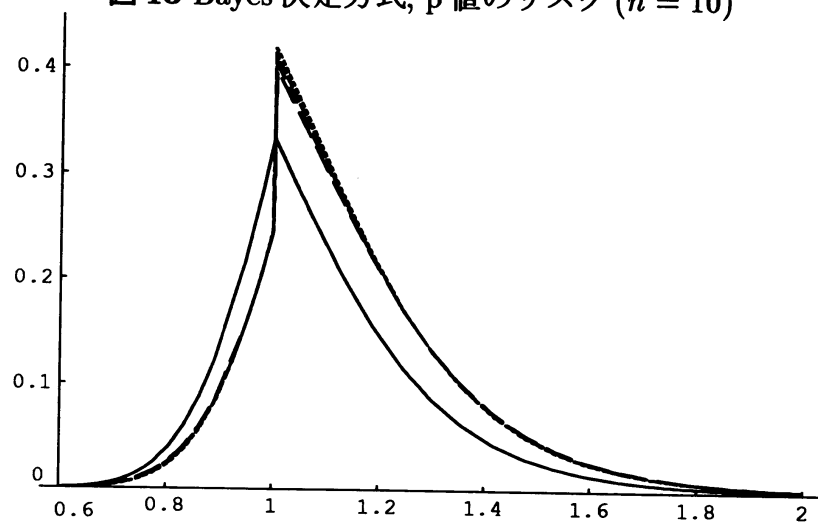


図 14 p 値, N-P 検定のリスク ( $n = 20$ )

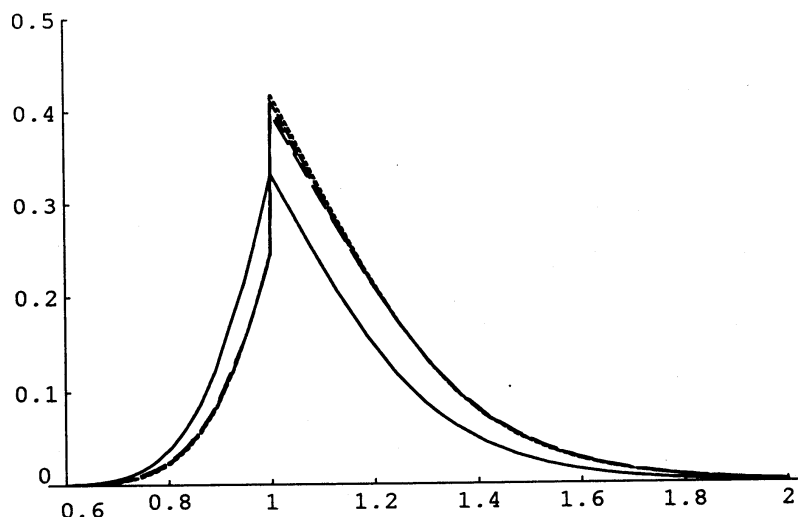


図 15 Bayes 決定方式,  $p$  値のリスク ( $n = 20$ )

標本数  $n$  を大きくすることで 3 つの決定方式のリスクはともに下がるが, やはりその中でも Bayes 決定方式の良さは際立っている. しかし, 正規分布の平均の場合とは違い, Bayes 決定方式の中でのミニマックス解を求めることは容易でないし, ミニマックス解が存在するのも確かではない. これは, 平均の場合は対称な正規分布に基づいていたが, いま考えている分散の場合は非対称なカイ 2 乗分布 (ガンマ分布) に基づいているからである.

## 5. おわりに

本論においては, 正規分布の母数に関する検定について, 荷重 2 乗損失を用いて, Bayes 決定方式, N-P 検定,  $p$  値のリスクについて考察した. また, 正規分布の平均の片側検定問題において, 正規分布を事前分布として, Bayes 決定方式のミニマックス解を数値的に求めることができた. しかし, 正規分布の分散の片側検定問題においては, 事前分布として共役分布のガンマ分布をとったが, これは非対称な分布のためにミニマックス性について考えることは容易でないことが分かった. 事前分布として他の分布を考える余地もあると考えられるが, これについては今後の課題としたい.

## 参考文献

- [BS87] Berger, J. O. and Selleke, T. (1987). Testing a point null hypothesis : The Irreconcilability of  $p$  values and evidence (with discussion). *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 112-139.
- [CB87] Casella, G. and Berger, R. L. (1987). Reconciling evidence in the one-sided testing problem (with discussion). *J. Amer. Statist. Assoc.*, **82**, 106-139.
- [De73] DeGroot, M. H. (1973). Doing what comes naturally: Interpreting a tail area as a posterior probability or as a likelihood ratio. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **68**, 966-969.
- [Di77] Dickey, J. M. (1977). Is the tail area useful as an approximate Bayes factor? *J. Amer. Statist. Assoc.*, **72**, 138-142.

- [HCRWF92] Hwang, J. T., Casella, G., Robert, C., Wells, M. T. and Farrell, R. H. (1992). Estimation of accuracy in testing. *Ann. Statist.*, **20**, 490-509.
- [Le86] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*, 2nd ed. Wiley, New York.
- [Li57] Lindley, D. V. (1957). A statistical paradox. *Biometrika*, **44**, 187-192.